有趣的數學理論

數學的分類與功用

一般將數學分成代數(algebra)、幾何(geometry)、分析(analysis)、統計(statistics)及離散數學(discrete mathematics)五大類，而離散數學已經擴展成計算機科學。然而以上之分類並非全無交集，如解析幾何既是幾何也是代數；而邏輯學(Logics)是計算機科學的一種，也是分析學的一種。

學習數學的功用在於使人類能夠變得更聰明，思考更加合理，對問題的定義能了解更清楚，並且能夠善用圖形與符號分析問題。以下為幾個例子。

Eg.老農夫過世留下五頭牛，遺囑要將五頭牛分給兩個兒子：老大得二分之一，老二得三分之一，而經過計算

$5\times1/2=2.5$：老大分得 2.5 頭牛，$5\times1/3=1.6666$：老二分得 1.6666 頭牛

結果兩個兒子便打算宰殺牛隻以完成父親的心願。此時有個聰明的鄰居帶來自己的一頭牛，於是

$(5+1)\times1/2=3$：老大分得三頭活牛，$(5+1)\times1/3=2$：老二分得二頭活牛

最後剩下一頭牛鄰居再帶回去。這故事代表什麼數學意義？

(解)：$\because 1/2+1/3=5/6<1$，$\therefore$採用老農夫遺囑的方法絕對無法完美分配遺產

而$\because (5+1)/6=1$，$\therefore$必須用聰明鄰居的方法：再加一頭牛進來，才可以完美地分配。

Eg.「桃花眼」的定義。

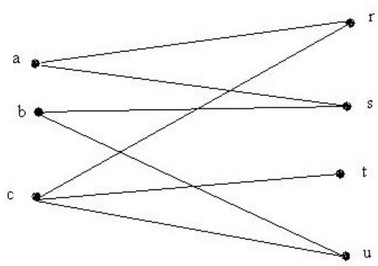
一般命理書籍的定義：「水汪汪的眼睛，眼波流露妖嬈風情」—此種定義十分抽象，不清不楚！

符合數學的定義：「笑的時候，眼睛的上緣與下緣的曲率半徑中心都位在眼睛的下方」—此種定義十分清楚！

Hall 結婚定理(Hall's Marriage Theorem)與其應用—此定理由英國數學家 Philip Hall 提出。令 V 與 W 為兩個分開的族群，但 V 至 W 之間有連線，令 V 的任一個部份集合的元素個數為 S，而其連線至 W 的對應的個數為 $R(S)$。如果$|S|\le|R(S)|$，則 V 的每一個元素都可在 W 中找到一個專屬於自己的對應。

Eg. 某婚友社想要撮合 3 個男生：周杰倫(a)、劉德華(b)、蘇友朋(c) 與 4 個女生：林志玲(r)、侯佩岑(s)、林嘉綺(t)、白歆惠(u)。如果周杰倫喜歡林志玲與侯佩岑，劉德華喜歡侯佩岑與白歆惠，蘇友朋喜歡林志玲、林嘉綺與白歆惠，那麼是否每個男生都可以配到心愛的女人？



(解)：如果 $S_1=\{a,b,c\}$，則 $R(S_1)=\{r,s,t,u\}$，於是 $|S_1|=3<4=|R(S_1)|$

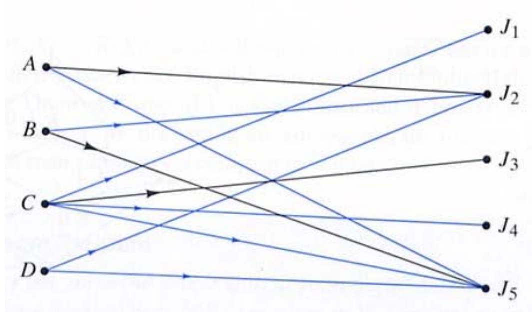
如果 $S_2=\{a,b\}$，則 $R(S_2)=\{r,s,u\}$，於是 $|S_2|=2<3=|R(S_2)|$

如果 $S_3=\{a,c\}$，則 $R(S_3)=\{r,s,t,u\}$，於是 $|S_3|=2<4=|R(S_3)|$

如果 $S_4=\{b,c\}$，則 $R(S_4)=\{r,s,t,u\}$，於是 $|S_4|=2<4=|R(S_4)|$

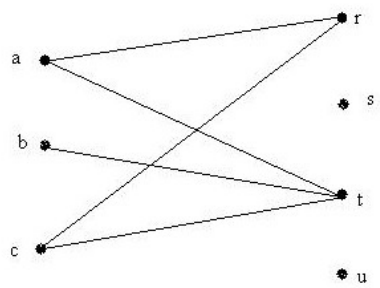
∴ 每個男生都可以配到心愛的女人！

Eg. 某婚友社想要撮合女 F4：Amy(A)、Fanny(B)、Tiffany(C)、Stacy(D) 與 5 個男生 J_1-J_5。結果女 F4 個自挑選喜歡的對象如下圖。令 $S=\{A,B,D\}$，則 $R(S)=\{J_2,J_5\}$，於是$|S|=3>2=|R(S)|$，因此女 F4 無法每個人都配到自己心愛的男人。



Eg. 某婚友社想要撮合 3 個男生：金城武(a)、彭政閔(b)、張家浩(c) 與 4 個女生：柯以柔(r)、許純美(s)、蔡淑臻(t)、如花(u)。如果金城武喜歡柯以柔與蔡淑臻，彭政閔只喜歡蔡淑臻，張家浩喜歡柯以柔與蔡淑臻，那麼是否每個男生都可以配到心愛的女人？



（解）：如果 $S=\{a,b,c\}$，則 $R(S)=\{r,t\}$，於是 $|S|=3>2=|R(S)|$

∴無法每個男生都可以配到心愛的女人！

例如金城武娶柯以柔而彭政閔娶蔡淑臻，則張家浩就娶不到心愛的女人。同樣地，如果張家浩娶柯以柔而彭政閔娶蔡淑臻，則金城武就娶不到心愛的女人。

邏輯學與集合論

邏輯學可訓練人的思考趨於理智，並且特別重視「因果律」與「矛盾律」，可以使人更加了解事件的因果關係，使人的推理不會產生矛盾現象。

Eg. 「因為林志玲很漂亮，所以有些男生喜歡她」與「因為沒有男生喜歡林志玲，所以這表示她不漂亮」，這兩句話邏輯相等。($p\rightarrow q$與$\neg q\rightarrow\neg p$邏輯相等)

Eg. 如果 「因為林志玲很漂亮，所以男生都喜歡她」與「林志玲很醜，否則就會有男生喜歡她」，這兩句話邏輯相等。($p\rightarrow q$與$\neg p\vee q$邏輯相等)

Eg. 如果「白歆惠與隋棠都是美女」不正確，即表示「白歆惠很醜或是隋棠很醜」。(**De Morgan's First Law:** $\neg(p\wedge q)=\neg p\vee\neg q$)

Eg. 如果「白歆惠很醜或是隋棠很醜」不正確，即表示「白歆惠與隋棠都是美女」。(**De Morgan's Second Law:** $\neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q$)

Eg. 歌星鄭怡的歌：「苦苦的一杯酒，淡淡地沒有滋味，、、、」。歌星余天的歌：「有一位陌生的女孩，我們時常見面，、、、」。以上二者歌詞皆有矛盾之處。

Eg. 聖經中的故事：「上帝創造亞當與夏娃，生下該隱與他的兄弟，該隱因故殺死他的兄弟亞伯後，便被上帝懲罰，將該隱流放至外地，於是該隱便在外地娶妻生子。」

(矛盾之處)：聖經中記載上帝只創造了亞當與夏娃二人，所以當亞伯死後，全世界應只有三個人(亞當、夏娃與該隱)存在，因此不知聖經中該隱娶的女子是那裏來的？

Eg. 1990 年代初，藝人白冰冰(本名白月娥)控告某廠商生產「白冰冰礦泉水」冒用其名號，同年歌星林強(藝名)亦控告香港商人林強(本名)生產「林強運動飲料」冒用其名號，結果我國法官判決上述兩件案子一勝訴一敗訴。

(矛盾之處)：上述兩件案子為同類型案件，法官應該引用相同法律條文判決，但是竟然有不同判決結果，可見得我國法律教育對學生之邏輯訓練有問題！

Eg. (a)2004 年 11 月 1 日木柵動物園的無尾熊哈雷得鼻咽癌而被安樂死，有民意代表要求動物園園長應該下台負責。(b) 2004 年 11 月 4 日精神病患陳x和跳入木柵動物園的獅欄內向獅子傳教而被獅子咬傷，結果獅子被注射麻醉針劑。

(因果分析)：(a)事件並無因果關係，因此動物園園長不必下台，但是如果是因為動物園管理不善導致動物死亡，則相關人員應該負責。

(b)事件是因為人跑進獅子區內逗弄獅子才被咬傷，並非獅子跑出獸欄亂咬人，因此獅子無罪，而動物園的處理方式有問題，應該用水柱將獅子驅離後再將精神病患逮捕帶出來。

Eg. 「前世今生」、「六道輪迴」及其相關之宗教理論。

(矛盾之處)：如果根據「前世今生」理論，每個人都有「前世」且「前世」都是「人」，則全世界的人口數目自古至今應該都差不多，但現在 21 世紀全世界的人口已突破 60 億，比 20 世紀初期的人口多了好幾倍，因此不知多出來的人口是什麼東西投胎來的？

根據「六道輪迴」理論，人做壞事則下輩子會投胎變成畜牲，則全世界的人口數目自古至今應該遞減，這顯然與已知事實矛盾。又如果這些多出來的人口是由畜牲轉世而來，且畜牲修行則下輩子投胎可變成人，則吾人應該常看到許多吃素的老虎、獅子，也應該會常看到有小狗唸「大悲咒」，貓咪唸「金剛經」等情況。

Eg. **「今日我以●●為榮，明日●●以我為榮。」**

(**矛盾之處**)：如果前者成立，則後者通常不會發生，反之亦然。

Exercise職棒兄弟象棒球隊 2003 年開賽之初戰績不佳，如果有大學體育類研究所研究生認為這與木柵動物園大象林旺過世有關，準備用此當作碩士或博士論文來探討，那麼這樣的研究有何問題？或是應該如何研究這個問題？

許多邏輯學理論可以用集合理論的數學符號來表示，以下為著名的例子。

Eg. 「羅素詭論」：某犯人被判死刑即將執行，臨死前法官對犯人說：「如果你所交待的遺言是實話則可免死，如果是謊話則非死不可！」於是聰明的犯人便說：「我將被處決。」因此這位犯人便僥倖存活。這故事代表什麼數學意義？

(解)： ∵ 如果「我將被處決。」是實話，則依照法官的命令，犯人可以免死；
如果「我將被處決。」是謊話，則表示犯人不會被處決。
無論是以上那種情況，這犯人都不會死。

羅素詭論以集合理論的數學符號來表示為： $S=\{x|x\notin S\}$

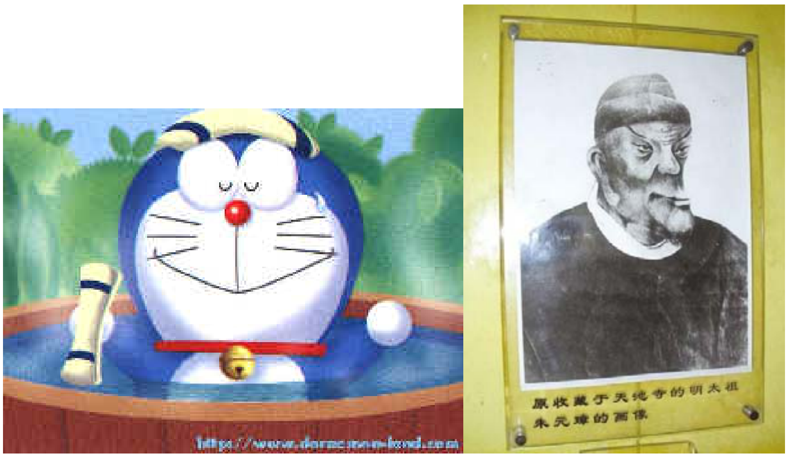
Eg. 戰國時代公孫龍之「白馬非馬」理論。

(解)：以集合理論的數學符號來表示，「白馬非馬」理論為：{白馬}⊂{馬}，表示所有白馬的集合比較小，被包含在所有馬的集合中。所以白馬不能代表所有的馬。

Eg. 邏輯學：「若 a 則 b」與「若非 b 則非 a」為同義語句，例如「若是正三角形則一定是等腰三角形」與「若不是等腰三角形則一定不是正三角形」為同義語句。這可以用集合理論：

A={正三角形}⊂B={等腰三角形}與 B^c={非等腰三角形}⊂A^c={非正三角形}為等效之同義語句。

Exercise美女主播侯×岑自從發生緋聞被狗仔隊偷拍後，便找命理大師叮噹居士算命，叮噹居士鐵口直斷侯×岑未來會嫁給一位「鼻子尖尖，鬍子翹翹，手裏拿著一根釣竿」的人，此事經過「橘子日報」報導後，於是全台灣的釣竿缺貨，棒球隊球員比賽全都改拿釣竿上場打擊，所有整型外科醫師也生意興隆。以上的故事如果是真的，那麼從數學邏輯關係探討，代表什麼意義？試申論之。



叮噹居士與明太祖朱元璋

分析學的基礎—極限與微積分概述

極限是數學上，描述無窮大(多)、無窮小(少)的運算或紀錄後，所趨近的數值。而其主要的應用，便是微積分。

Eg. 數學上有一個與極限有關的著名詭辯：「龜兔賽跑時，假設兔子的速度是烏龜的 10 倍，當烏龜領先兔子 1 公尺時，兔子追了 1 公尺，烏龜則可跑 0.1 公尺；若兔子再追 0.1 公尺時，則烏龜又跑 0.01 公尺；如果兔子再追 0.01 公尺時，則烏龜又跑 0.001 公尺；如此一直下去，則兔子永遠追不上烏龜。」

(解)：其實這詭辯是錯的，理由如下：假設兔子跑 1 公尺的時間要 1 秒鐘，則跑 0.1 公尺要 0.1 秒，若要跑 0.01 公尺則需要 0.01 秒；依此類推，兔子跑 1 公尺+0.1 公尺+0.01 公尺+0.001 公尺+ ・・・所需時間為

$$1+0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots=1/(1-0.1)=10/9\text{(秒)}$$

因此，事實上兔子只要 10／9 秒的時間即可追上烏龜。以上說明一件事實：無限多項的級數和，有可能是一個有限值。

微積分最早是用來分析力學中的位移、速度與加速度之關係，後來又擴展到分析電磁學及電磁波等現象；同時，亦出現了商用微積分等應用。如以微積分研究如何投資可獲得最大利潤等。

微分之例：假設物體移動的距離(位移) $S(t)$是時間的函數，而速度即為位移對時間的一次導函數，而加速度即為位移對時間的二次導函數：

$$a(t)=dv(t)/dt=d^2S(t)/dt^2$$

利用函數微分等於零的特性，吾人可以計算出函數的極大極小值。

積分：如果 $dy/dx=g(x)$，則 $y=\int g(x)+c$

最佳化(Optimization)理論

現代數學的主要應用之一，便是求問題的最佳化之解。最佳化通常是求目標函數的極大或極小值，除了簡單的微積分理論可以計算極大或極小值之外，還有變分學(Calculus of variation)、線性規畫與非線性規畫(Linear programming and nonlinear programming)、Lagrange 法、蒙地卡羅法(Monte Carlo Method)、模擬退火法(Simulated annealing method)、基因演算法(Genetic method)、圖形理論(Graph theory)、平行處理(Parallel processing)等數學方法可以求得問題的最佳化之解。

Eg. 某種藥品每天吃 x 公克，則體力可增加 x %，但是其副作用是肝臟功能會降低 x^2 %，則每天應該吃多少最好？

(解)：吾人設定：對身體有益為正號，對身體有害為負號。則上述題目可轉化成函數

$$f(x) = x - x^2$$
$$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0.5$$

所以用簡單的微積分理論可知：每天吃 0.5 公克最好。

Eg. 棒球比賽中，上壘率高的排第一棒，打擊率高的排第三棒，長打率高的排第四棒，這可由蒙地卡羅法驗證此種排棒方式得分之機率期望值最高。

(註)：蒙地卡羅法：以電腦模擬所有可能發生情況，然後分析計算所有可能的結果的機率。

Eg. 文言文「毋忘汝」比電視廣告中林志玲的白話文「喔！才不會忘記你的」要符合最佳化理論。因為文言文是以最少的中文字表達最多的意思，適合現今電腦化社會，可減少中文輸入時間，節省簡訊費用。而在司馬遷的史記仲尼弟子列傳記載：「‧‧‧故子貢一出，存魯、亂齊、破吳、彊晉而霸越。子貢一使，使勢相破，十年之中，五國各有變。」，只用了幾個動詞，即將孔子的學生子貢之功勞一一點出，堪稱是文言文字數最佳化之代表作。

平行處理與管線(Pipeline)理論

電腦科學中最重要的理論，平行處理是指將無先後順序的事情同時來做，可節省時間，管線理論是指將有後順序的事情排好依序來做，可增加效率並節省時間。

Eg.「大掃除時，部份人掃地，同時另外部份人擦窗戶」比「先掃地，然後再擦窗戶」好，因為所花時間較少，符合最佳化理論與平行處理理論，且掃地與擦窗戶兩者並無先後關係性。但是吾人無法「一邊睡覺一邊吃飯」，因為睡覺行為具有排他性；吾人也無法「同時掃地與拖地」，因為掃地與拖地有時間先後關係性。

Eg.「父親開車送小孩上學，然後直接到公司上班」比「父親先送小孩上學，然後回家開車再到公司上班」好，因為所花時間少，符合最佳化理論與管線理論。

Eg.「洗完澡後，洗澡水用來澆花」比「洗完澡後將洗澡水放掉，然後用自來水澆花」好，因為用水量少，符合最佳化理論與管線理論。但是「洗完澡後，將洗澡水用來泡速食麵吃」雖然符合上述理論，可是並不衛生

機率論與統計學

機率論是指對於大量數目的偶然現象，探討其出現某種結果的比率。而機率探討的是數目很多的群體現象，而非少數或單一個體。

Eg. 某種癌症的治癒率是 50%，是表示有一大群此種癌症的患者，約有一半人可以治癒。如果某醫生只治療兩個此種癌症的病人，第一個患者不治死亡，並不表示第二個一定會痊癒。

機率的大小與樣本空間的選取有關，不同的選取方式，會導致不同的結果。

Eg. 比較「車禍」與「飛機空難」何者較可怕？

(解)：以每年發生的次數來看，「車禍」發生的機率遠大於「空難」。

如果以發生之後的死亡人數來看，「空難」死亡的機率遠大於「車禍」。

因此兩者的可怕情況難以比較。

統計學是用機率的觀念，來反推大量(或全體)數目的某些特性。一般而言，統計結果須滿足以下幾個條件才正確：(a)隨機取樣，(b)取樣數目要多，(c)統計過程不能改變原先全體之特性。統計學一般常用在預測事情最可能之結果，例如選舉的民意調查、收視率調查等。

Eg. 1948 年美國總統大選，當時美國的民意調查顯示共和黨候選人<u>杜威</u>的支持率遙遙領先民主黨候選人<u>杜魯門</u>，可是開票結果卻是<u>杜魯門</u>當選，後來經過分析才知道原來是當時美國只有富裕的家庭才會裝設電話，因此當年使用電話訪問來做民意調查只能看出有錢人的投票傾向較支持<u>杜威</u>。

Eg.「×虹」頻道播放由<u>陽婆婆</u>主演的搞笑三級片「金瓶梅歪傳」，收視率為 20%。

「民×」頻道播放由董月花主演的感人肺腑連續劇「長瘤的媳婦」，收視率為 18%。「華×」頻道播放由小叮噹主演的兒童賀歲片「哆啦A夢之飛貓在天」，收視率只有 6%。如果上述統計的誤差皆為正負 5%，那麼是否實際收看「金瓶梅歪傳」的人會比看「長瘤的媳婦」或看「飛貓在天」的人多？

(解)：「金瓶梅歪傳」實際收視率為 15-25%之間，「長瘤的媳婦」實際收視率為 13-23%之間，「飛貓在天」的實際收視率為 1-11%之間，所以實際收看「金瓶梅歪傳」不一定比「長瘤的媳婦」的人多，但一定高於「飛貓在天」。

一般而言，運用統計學所得到之結論並非絕對準確，可以有少數例外；而用純粹用數理邏輯所推導的結論則絕對正確。另外統計學所得到結論不一定為因果相關(或邏輯相關)，有時只是表示統計相關。而一般算命理論大多來自古代人的統計結論，但是缺乏實際數據，而且大多是統計相關的結論而非因果相關。

Eg. (a)「肥胖的人較易得心臟病」—因果相關：說明「肥胖」是導致「心臟病」的原因之一，而且並非所有肥胖的人都會得心臟病。

(b)「冰淇淋銷路好的時候，游泳溺斃的人也較多」—統計相關但非因果相關：說明「冰淇淋銷路好」並非導致「游泳溺斃」的原因，只是二者都常在天氣熱的時候發生。

Eg. 「處女座的人做事較龜毛」—「處女座」並非導致「龜毛」的原因，所以並非因果相關，而是統計相關。此命題說明可能有很多個處女座人士很龜毛，但是究竟有多百分比的處女座人士很龜毛？從古至今並未有確切的統計數據留下來。

Exercise根據古代麻衣相法、柳莊相法、命相鐵關刀、冰鑑等命理書籍，以及現代人瀟湘居士、一善居士、飛雲山人等命相大師之大作，認為：「鷹勾鼻者，個性奸詐，城府甚深，居心叵測；善於理財但是十分自私，見不得別人比自己好；而 45 歲及 49 歲時事業易破敗」。已知港星劉德華就是這種鼻子，如果你是位統計學家，該如何正確地分析或論斷劉德華之命理?

機率與資訊理論(Information Theory)

資訊理論是以機率來分析事件或新聞重要性(資訊量)的方式。它有幾個基本原則：

(a) 機率越小者，資訊量越大

Eg. 「總統自殺」與「今天下雨」新聞重要性比較

(解)：「總統自殺」之機率很低，所以一旦發生總統自殺的事件將會是大新聞；而「今天下雨」之機率較高，除非久旱不雨，否則「今天下雨」不太容易成為大

新聞。

Eg. 為什麼「狗咬人不是新聞，人咬狗才是新聞」？

(解)：因為「狗咬人」之機率較高，所以新聞性較低；而「人咬狗」之機率較低，因此新聞性較高。

(b) 週期性出現的事件較不規則出現的事件之重要性為小

Eg. 記載每天例行性活動的流水帳日記：「早晨起來，刷牙、洗臉、吃飯，……，晚上睡覺。」毫無看頭；而記載：「今天我夢寐以求的帥哥請我吃牛排」之類的日記教易引人偷看。

(c) 事件發生期間較短者資訊量較大

Eg. 「只演一天的單元劇」與「連演 30 天的連續劇」比較，前者如一天沒看，則對劇情一無所知；但是後者如一天沒看，則仍然能猜到劇情走向。

Eg. 「霹靂布袋戲」如演無限多集，則將會變成可看可不看，可有可無的劇集。

$\because \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0,\ \ \forall a\in N$ **。而霹靂定律如下：**

(a) 永不死亡或死後必定復活的角色：<u>素還真</u>、<u>一頁書</u>、<u>秦假仙</u>等。

(b) 剛出場時天下無敵，然後武功逐漸退化，最後被新角色輕鬆殺死的角色：<u>魔魁</u>、<u>鬼隱</u>、<u>經天子</u>、等，這些角色佔霹靂布袋戲劇集中的絕大多數。

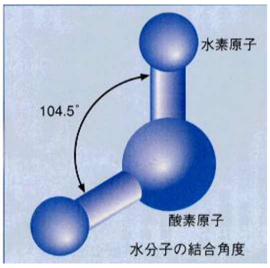
Eg. 「921 大地震死亡數千人」與「台灣一年死於車禍者數千人」新聞重要性比較

(解)：因為前者發生時間較短(地震時間不會超過幾分鐘)，而後者時間為一年，所以前者新聞重要性較高。況且發生大地震的機率較小，而發生車禍的機率較大。

Exercise如果你是「壹週刊」的狗仔隊記者，那麼依據數學中之資訊理論，以下各感情事件的報導價值排行榜為何？ (a)<u>小叮噹</u>的主人<u>大雄</u>與<u>Shizuka</u>(<u>靜香</u>)、(b)立法委員<u>鄭×鎮</u>與天上掉下來的禮物<u>王×嬋</u>、(c)大學學生情侶<u>詹×霖</u>與<u>陳×琦</u>。

群論(Group Theory)與對稱觀念

群論是一種數學，應用很廣泛，可以分析「對稱」的現象。尤其在化學應用上，群論常用來探討原子分子間的對稱結構。



Eg. 水(H_2O)是平面彎曲形的分子，通過氧原子而將 H-O-H 角度平分的直線，就是一個轉 180 度旋轉運算的旋轉軸。同時，分子還有一些對稱平面，其中有一個是包含旋轉軸，而與分子平面垂直的平面，另一個是包含三個原子也包含旋轉軸的平面。加上保留原來分子形狀的對稱運算，總共就有四個對稱運算。

Eg. 氨(NH_3)的對稱性質就不一樣。它的旋轉軸，通過氮原子與三個氫原子所形成之平面的中心，只能轉 120 度，另外也有好幾個對稱平面。在一個分子裏的對稱運算，會形成一個完整的群。

中國的對聯文學，亦是充滿群論對稱運算的觀念。撰寫對聯時，只要把握上下聯之間「名詞」對「名詞」、「動詞」對「動詞」、「形容詞」對「形容詞」、「副詞」對「副詞」、「介系詞」對「介系詞」的基本概念即可。而對稱語句交換後，在文字意義上仍然通順。

Eg.「螞蟻樹下馬倚樹，雞冠花前雞觀花」

(解)：此對聯充滿諧音的趣味。

「螞蟻樹」對「雞冠花」:「名詞」對「名詞」

「馬」對「雞」:「名詞」對「名詞」

「樹」對「花」:「名詞」對「名詞」

「下」對「前」:「介系詞」對「介系詞」

「倚」對「觀」:「動詞」對「動詞」

對稱語句交換後:「雞冠花前馬倚樹，螞蟻樹下雞觀花」仍然十分通順，但是意義不同。

Eg.「軟溫新剝雞頭肉，潤滑方凝塞上脂」

(解)：傳說此對聯分別是唐明皇與安祿山稱贊楊貴妃之上圍的語句。

「軟溫」對「潤滑」:「形容詞」對「形容詞」

「新」對「方(才)」:「形容詞」對「形容詞」

「剝」對「凝(結)」:「動詞」對「動詞」

「雞頭」對「塞上」:「名詞」對「名詞」

「肉」對「脂(肪)」:「名詞」對「名詞」

對稱語句交換後:「潤滑新剝雞頭肉，軟溫方凝塞上脂」亦然十分通順。

Eg.「廟小妖風大，池淺王八多」

(解)：傳說此對聯為毛澤東所作，常用來罵人。

「廟」對「池」:「名詞」對「名詞」

「妖風」對「王八」:「名詞」對「名詞」

「小」對「淺」:「形容詞」對「形容詞」
「打」對「多」:「形容詞」對「形容詞」
對稱語句交換後:「池淺妖風大，廟小王八多」仍然十分通順，只是意思不太合理。

Eg. 「明察秋毫工技院，暗藏春色私娼寮」

(解):此對聯充滿諧音的趣味，傳說是早年台大電機系楊姓教授與成大電機系黃姓教授所作。「工技院」是「工業技術研究院」的簡稱，現在一般簡稱為「工研院」，而上聯的「工技院」，其諧音為「公妓院」，即「公立的妓院」，正好對上下聯的「私娼寮」，故此對聯一出，即遭到工研院人士的抗議。

Exercise大雄的爸爸恰好大年初一過生日，於是大雄便寫了春聯:「天增歲月爹增壽，春滿乾坤娘滿門」貼在大門口，結果大雄被媽媽痛打了一頓。依照數學中的群論(Group Theory)之對稱觀念，大雄寫的春聯是否有問題?試申論之。

貓福齊天　　　　True Doraemon

Exercise分析霹靂布袋戲主角素還真之出場詩號:「半神半聖亦半仙，全儒全道是全賢，腦中真書藏萬卷，掌握文武半邊天。」與小叮噹(哆啦A夢)之詩號:「半神半聖亦半貓，英明英勇是英豪，腹中妙袋藏萬寶，吃遍天下銅鑼燒。」，以上何者不含對稱語句?

中國古代的數學

中國古代的數學十分發達，春秋時代的孔子以「禮、樂、射、御、書、數」教導學生，其中學生子貢因為數學成績優異，加上口才很好，於是成為春秋末期時代的大商人。以下為中國古代的數學教材之例:

Eg. 「蘇武牧羊北海邊，不知過了幾多年，分明記得天邊月，二百三十五番圓」

(解):　$235 \div 12 = 19 \ldots\ldots$餘數 7

已知農曆每 19 年閏月 7 次，所以蘇武牧羊共 19 年。這是古人教小孩子算術除法的詩。

Eg.「**巍巍寶塔共七層，紅光點點倍加增，共燈三百八十一，試問尖頭幾展燈**」
(解)： $a_1+2a_1+4a_1+8a_1+16a_1+32a_1+64a_1=a_1(1-2^7)/(1-2)=381,\ a_1=3$。這是古人教小孩子等比級數和之公式的詩。

Eg. 中國剩餘定理：「韓信點兵，三個三個一數餘二，五個五個一數餘三，七個七個一數餘四，問韓信至少有多少兵」。古人以詩：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，七子團圓正半月，除百零五便得知」說明「韓信點兵」問題的解法：

找一個 5 與 7 的倍數而除以 3 會餘 1 的數，這個數是 70(三人同行七十稀)
再找一個 3 與 7 的倍數而除以 5 會餘 1 的數，這個數是 21(五樹梅花廿一枝)
再找一個 3 與 5 的倍數而除以 7 會餘 1 的數，這個數是 15(七子團圓正半月)
然後算出 70×2+21×3+15×4=263
最後將 263 除以 3、5、7 的最小公倍數 105：263÷105=2 餘 53
這餘數 53 便是答案(除百零五便得知)，因此韓信至少有 53 個兵。

西方數學的進展

(a)負數、虛數及無理數的意義在十六世紀時確認。

(b)十七世紀時，已知道 n 次多項方程式有 n 個根(不一定全相異)。

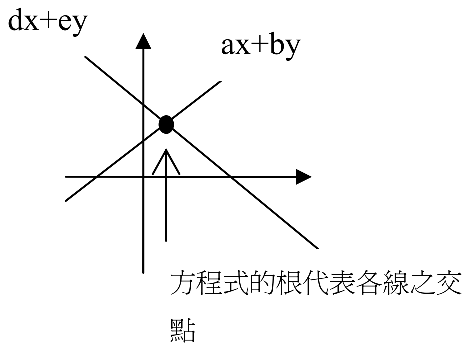
(c)十九世紀時，已知用近似方法求方程式的根，而這種方法後來發展成「數值分析」學。

解析幾何學的發明

笛卡兒(R. Descartes)使用座標系統，將平面或空間中的點予以明確定位，在此情形下，一個代數方程式可以表示一個曲線或曲面，反之亦然。於是許多幾何上的問題，便可由代數方法來完成。同樣地，許多抽象的代數問題也有了具體的意義。

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$ **Eg.**求解代數問題：

幾何問題：

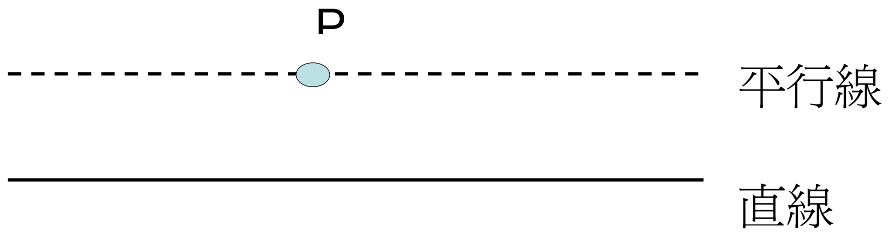


非歐幾何學與歐氏幾何學

$a \pm c = b \pm c, a \div c = b \div c$　　公理(axiom)的意義：不必證明，在一切科學中皆成立的真理，例如等量公理：。

公設(Postulate)：不必證明，但只在某種學科中被認定成立的真理，例如相對論中，光速為一宇宙常數；或歐氏幾何學中有五項基本公設。

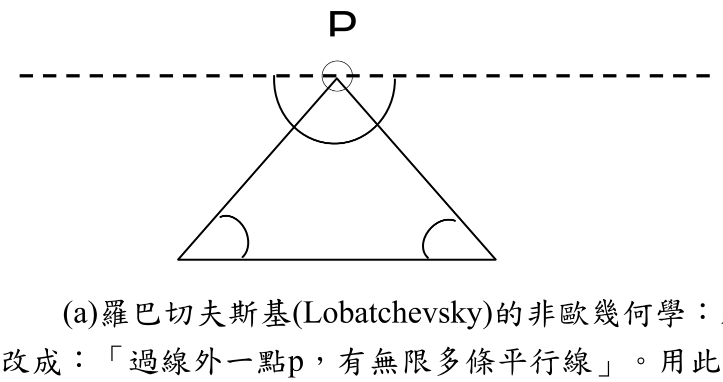
歐氏幾何學中的第五公設：「過一直線外一點，恰有一平行線」。運用平行公設，吾人可以証明三角形之三內角和為180°



(證明) 通過p點，作一平行線平行於三角形之底邊，則$\theta_4 = \theta_1, \theta_5 = \theta_3$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 180^\circ$$

以上證明過程告訴我們一件事：若平行公設不成立，則三角形三內角和不一定會是180°



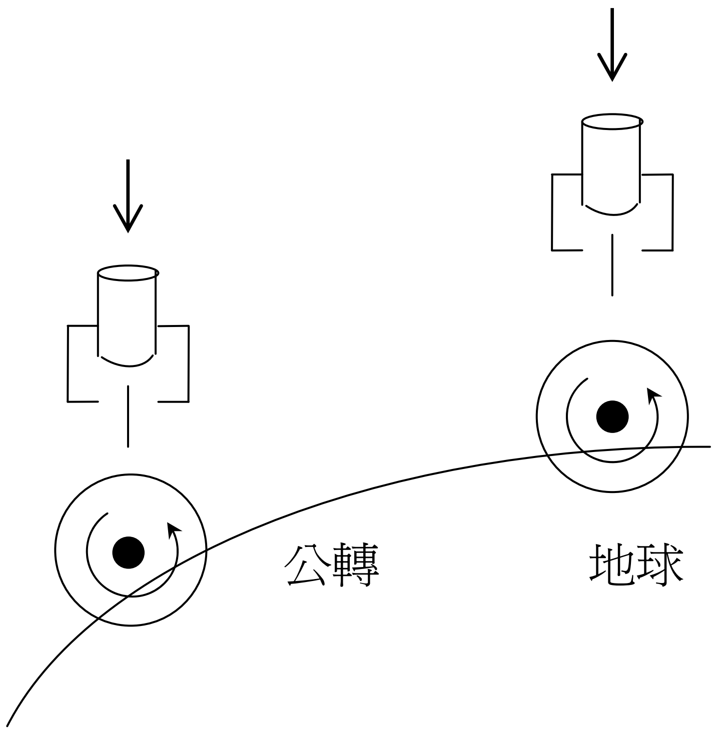
(a)羅巴切夫斯基(Lobatchevsky)的非歐幾何學：將歐氏幾何學中的第五公設改成：「過線外一點p，有無限多條平行線」。用此公設，可証明出三角形之內角和小於180°;若是三角形趨近無限小，則其內角和趨於180°。

(b)黎曼(Riemann)的非歐幾何學：將上述之第五公設改成：「過線外一點，沒有任何平行線存在」。用此公設可證明出三角形之內角和大於180°；若是三角形趨於無限大，則其內角和趨於180°。

而以上兩種非歐幾何學，均將歐氏幾何學視做其極限之情況。

非歐幾何對人類思想的啟發：任何一套理論，只要能自圓其說，在邏輯上不發生自相矛盾的現象，即可視作「對」的。而可以同時存在兩套或以上不同的學說以解釋自然現象，如中醫與西醫、古典力學與量子力學等。

非歐幾何的應用:來自遙遠某恆星的星光，到達地球時可視作平行光。將望遠鏡對準某遙遠恆星，經過一天後，再度對準同一顆恆星，則所經過的時間便是地球自轉一週的時間。



幾位著名數學家的貢獻

(a)希臘的歐幾里得在公元前 300 年左右，寫下「幾何學原理」一書，將古代有關幾何學的知識加以整理，運用嚴密的邏輯推理和數學計算方法，演繹出許多定理，全書共有 476 個命題。

(b)公元 573 年，中國的祖沖之算出圓周率的範圍是：$3.1415926<\pi<3.1415927$ 且$\pi \fallingdotseq 355/113$ or $22/7$，並且求解出二次及三次方程式的根。

電腦發明後，1958 年法國人算出π值至小數點後三十一萬位，1973 年則算到小數點後一百萬位，而日本人金田康正更算到小數點後二億零一百五十二萬六千位。而現代人類所以要算圓周率π，主要是檢驗電腦計算之精確度及所撰寫程式之優劣。

註：計算 π 的幾種方法：

$$\pi = 4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+-\cdots)$$

$$\pi^2 = 6(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots)$$

(c)公元 1594 年，英國的奈普爾(J. Napier)導出三角學中積化和差之公式：

$$2\,\mathrm{Sin(A)} * \mathrm{Sin(B)} = \mathrm{Cos(A - B)} * \mathrm{Cos(A + B)}$$

於是啟發他找出將乘法變成加減法的運算方法。二年後，他製出世上第一份對數表，後來他又與牛津大學教授布里斯格(H. Briggs)發明了以 10 為基底的對數表，並於 1617 年出版。

西方早期的計算工具：對數尺

利用公式 $A=10^a$，$B=10^b \Rightarrow A\times B=10^{a+b}$，$A\div B=10^{a-b}$，因此只要利用對數尺知道 a、b、a+b 及 a-b 之值，即可得到 $A\times B$ 和 $A\div B$ 的大小。如此可以節省許多計算時間，因為計算加減法要比計算乘除法容易的多。而對數尺與算盤一樣，是電子計算器(機)發明前的一種有用的計算工具。

(d)1637 年，法國哲學家兼數學家笛卡兒提出解析幾何之觀念，而同一時期數學家費爾馬(P. Fermat)也提出同一套想法，即引進座標系統，則一個方程式可以代表一條曲線，於是便將代數和幾何學連貫起來。

(e)1676 年，牛頓與萊布尼茲(G. W. Leibniz)兩人在通信中，均提出了微積分的部分理論；而微積分著作正式出版之時間，萊布尼茲則比牛頓早了三年。