第五章

數學為科學之母

數學為科學之母，是眾所周知的一句話，因為許多科學與工程上的問題，都要用數學來解決，許多數學家也精通其他科學理論。但是數學的內容，一般人並不太清楚。在原始時代，數學的定義大多只包含算術，也就是計算相關的學科；但是到了後期，數學已分化成代數（Algebra）、幾何（Geometry）、分析（Analysis）、統計（Statistics）及離散數學（Discrete Mathematics）等好幾大類。時至今日，離散數學也早已經擴展成今日計算機科學的基礎，因此數學的內容也更加廣泛，其重要性也就與日俱增。然而以上之分類並非全無交集，例如解析幾何既是幾何也是代數；而一般中學生所學的三角函數，更是包含幾何、代數、函數分析等不同方面的應用。甚至於有些新的數學如纖維叢數學等，至今也還無法將其歸類。

5.1數學發展史

在數學的發展史上，有以下幾個重要里程碑，分別介紹如下。

5.1.1 早期數學的發展

古希臘的數學家畢達哥拉斯（Pythagoras）大約生在公元前 580 年，卒於公元前 500 年左右，他發現並證明了畢氏定理（圖 5-1）。畢達哥拉斯他是數學家、哲學家和音樂理論家。從他開始，希臘哲學開始產生了重視數學的傳統，畢達哥拉斯認為數學可以解釋世上一切事物，他對數字的癡迷已經達到崇拜數字的程度，他認為一切真理可以用比率、平方及直角三角形去證實。畢達哥拉斯認為平方數「4」是一個公正的數字。當他發現圓周率、$\sqrt{2}$ 等均為無理數時，便大為震驚，而他的一個學生因為向外人透露無理數的存在，結果便被畢達哥拉斯給淹死了。畢達哥拉斯也曾用數學研究音樂理論，而由此所產生的和諧（harmony）的概念也對以後古希臘的哲學家有重大影響。以上所提到的是畢氏定理在西方數學史的發展，但是在中國，畢氏定理則相傳是

由商末周初時的大臣商高所發現，故稱之為商高定理，又名勾股定理，而商高與周公（姬旦）齊名，都是輔佐西周開國的重要人物，其年代約為公元前 1100 多年左右，早於畢達哥拉斯的年代，而在東周戰國時代的《周髀算經》中即記載了商高定理的一個例子。到了三國時代，數學家趙爽更對《周髀算經》內的商高定理作了詳細注釋，可視為一個證明。

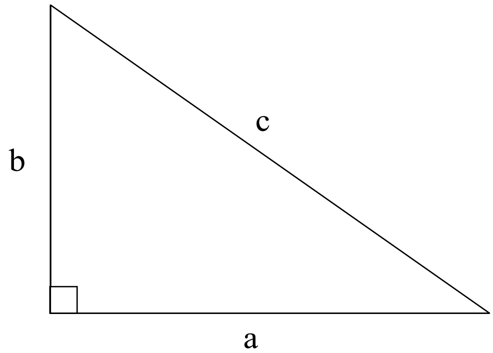


圖 5-1　畢氏定理

另外一位古希臘著名的數學家歐幾里德（Euclid），大約在公元前 300 年左右，寫了《幾何學原理》一書，將古代有關幾何學的知識加以整理，運用嚴密的邏輯推理和數學計算方法，演繹出許多定理，很多都是為人所熟知的定理，並且至今仍然常用。歐幾里德曾在托勒密（Ptolemy）國王的邀請下，來到亞歷山卓工作，並且為托勒密王講授幾何學，而這位國王曾問歐幾里德：「有沒有學習幾何學的捷徑？」歐幾里德回答：「在幾何學裡沒有專為國王鋪設的路。」（There is no royal road to geometry.）這話的意思即為求學無捷徑，從此之後成為傳誦千古的學習箴言。

古希臘晚期的數學家阿基米德（Archimedes）曾經用逼近法算出球的表面積與球體積、橢圓面積等，因此後世的數學家便依據逼近法的原理加以發展，而形成近代的微積分。他也研究出螺旋形曲線的性質，現今的阿基米德螺線（圖 5-2）就是以他的名字來命名。阿基米德出生在公元前 287 年，他的父親是天文學家和數學家，所以他從小受家庭影響，十分喜愛數學。大概在他 9 歲時，父親送他到埃及的亞歷山卓唸書，亞歷山卓是當時世界的知識、文化中心，學者雲集，舉凡文學、數學、天文學、醫學的研究都很發達，阿基米德在這裡跟隨許多著名的數學家學習，包括有名的歐幾里德，因此奠定了他日後從事科學研究的基礎。如果讓阿基米德一直持續的研究下去，他的成就將會更加不可限量，很可惜他在公元前 212 年（74 歲）時被人殺死。在天文學方面，阿基米德曾運用水力製作一座天象儀，球面上有日、月、星辰及五大行星，這個天象儀原理類似中國東漢時期張衡發明的渾天儀。根據記載，它不但運行精確，連

何時會發生月蝕、日蝕都能加以預測。在物理上，阿基米德也發現浮力定理：「物體在流體中所受的浮力，等於物體所排開的流體的重量」，因而他為流體靜力學建立了基本的理論。同時，他也發現了物理學中的槓桿原理。

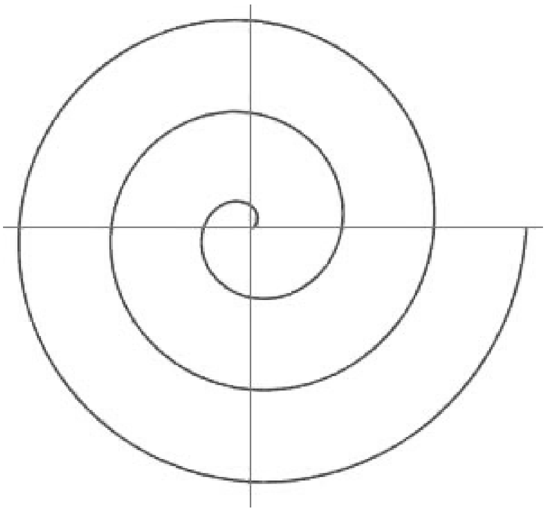


圖 5-2　阿基米德螺線

573 年，中國南北朝時期的數學家祖沖之，就已經算出圓周率（π）的範圍是 3.1415926<π<3.1415927，且π近似等於 355/113（密率）或 22/7（疏率），這項成就領先西方近 1000 年。祖沖之不但是數學家，還是天文學家、文學家與機械發明家。在天文方面，他提出了曆法「大明曆」，並且算出地球繞太陽公轉一周的時間為 365.24281481 日，與現代人用科學儀器所測得的數據 365.2422 日相比，已經準確到小數後第三位；他亦曾算出月球繞公轉地球一周的時間為 27.21223 日，與現在公認的 27.21222 日相比，已經準確到小數後第五位。他也發明了指南車、水碓磨與千里船等，還成功製造了類似諸葛孔明的木牛流馬的運輸工具。可惜祖沖之在世時並不得意，不但沒當大官，而且在生前還見不到大明曆的採用，甚至於他和兒子所作的數學書《綴術》在宋朝就已經失傳，幸好後來全世界的科學家都推崇祖沖之的貢獻，所以在月球上便有一座命名為祖沖之的山。圓周率的計算到了電腦發明後，已成為檢驗電腦計算之精確度及所撰寫程式之優劣的主要方法（註）。1958 年時可算到小數點後三十一萬位，1973 年則可算到小數點後一百萬位，而 1980 年後日本人金田康正更算到小數點後二億零一百五十二萬六千位。另外，祖沖之在當時已能求解出二次及三次方程

（註）計算圓周率的幾種方法：$\pi = 4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+-\cdots)$，$\pi^2 = 6(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots)$ 等。

式的根，這對於代數而言，具有很大的貢獻。

5.1.2文藝復興時代之後的數學發展

西羅馬帝國滅亡後，歐洲受蠻族統治，因此數學的發展出現停滯現象，直到文藝復興時代之後，數學發展才又興起。1637 年，法國哲學家兼數學家笛卡兒（Descartes）提出解析幾何之觀念，他引進了座標系統，將平面或空間中的點予以明確定位，在此情形下，一個代數方程式可以表示一個曲線或曲面，反之亦然。於是許多幾何上的問題，便可由代數方法來完成。同樣地，許多抽像的代數問題也有了具體的幾何上的意義，於是便能將代數和幾何學連貫起來。解析幾何可用圖 5-3 為例說明，例如要求解聯立方程式：ax+by=c 與 dx+ey=f，其實就像是求兩條直線的交點一樣，因為 ax+by=c 代表一條直線，而 dx+ey=f 代表另一條直線，只要這兩條直線不平行，則其交點的座標便是聯立方程式的解。除了解析幾何之外，許多現在使用的數學符號表示法都是笛卡兒最先採用的，包括了以 a、b、c 代表已知數，而以 x、y、z 代表未知數等。另外，笛卡兒在物理學方面也有所建樹，他首次用理論證明光的折射定律，還解釋了人的視力失常之原因，並且設計了矯正視力的透鏡；用光的折射定律解釋彩虹的原理。

代數問題：

求解 $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$

幾何意義之解釋：

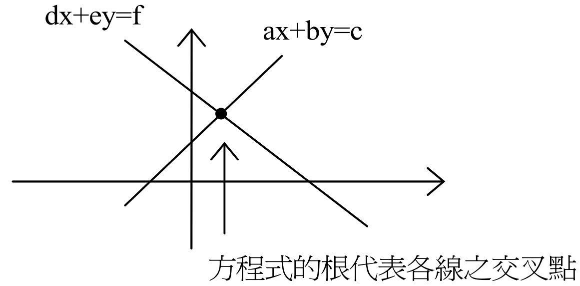


圖 5-3　解析幾何之例–求解聯立方程式之根與求兩條直線的交點的數學意義為相同

至於分析學中最重要的微積分之發展，則可追溯至 1676 年，牛頓（Newton）與萊布尼茲（Leibniz）兩人在當年的通信中，均提出了微積分的部分理論；但微積分著作正式出版之時間，萊布尼茲則比牛頓早了一點，所以萊布尼茲便常被尊稱為「微積分

之父」。而牛頓除了提出微積分的部分理論之外，他也證明了廣義二項式定理，並提出了用「牛頓法」求解方程式的根，而這種方法便成為現代數學數值分析理論的前身。

尤拉（Euler）有「數學界的莎士比亞」之稱，1707 年生於瑞士，1783 年逝世於俄國聖彼得堡。他 15 歲時進入大學修習神學和希伯來語課程，並跟隨伯努利（Bernoulli）研究數學，17 歲時即獲得碩士學位，19 歲時遠赴俄國聖彼得堡學院教書，不久就由助教躍升為教授。1741 年在德國腓德烈（Frederick）大帝的邀請下前往柏林。在柏林期間受聘擔任普魯士國王姪女的家教，教授的科目包括數學、天文、物理、哲學和宗教，他在德國 25 年間共發表了論文數百篇。1730 至 1740 年，由於埋首於研究工作，因此他的右眼失明。1766 年時應俄國凱薩琳（Catherine）女皇之邀返回俄國，不久之後，左眼也因白內障失明，因此在他人生的最後 17 年是兩眼全盲之下度過的。尤拉憑著過人的記憶，對三角和分析的公式、定理都瞭若指掌，計算能力比明眼人還快。他是一位多產的數學家，平均每年都有高水準的論文約 800 頁，屢獲獎賞。許多論著和 400 多篇論文都是在眼盲以後完成的。他的作品數量驚人，範圍涵蓋微積分、微分方程、解析幾何、微分幾何、數論、級數、數學物理等，《尤拉全集》有 70 冊。

高斯（Gauss）有「數學王子」之稱，他於 1777 年生於德國，1855 年去世。高斯從小就是數學天才，他的小學老師要他計算 1+2+3+4+…+100 等於多少，他馬上就推導出著名的等差級數公式：$1+2+3+4+\ldots+100=\frac{(1+100)\times 100}{2}=5050$ 而求出答案，讓老師嚇了一跳。高斯在 22 歲時即完成其博士論文，在數學史上和阿基米德、牛頓並列為三大數學家。高斯是數學家、物理學家、天文學家，其研究幾乎遍及所有數學領域，包括整數論、代數、非歐幾何、複變函數分析、統計學和微分幾何等。他提出代數基本定理（Fundamental Theorem of Algebra），還曾經與柯西（Cauchy）發現複變函數中著名的柯西積分定理（Cauchy's Integral Theorem），他還把數學應用於天文學、測量學、電磁學和重力等方面的研究，一生共發表 155 篇論文。

高斯雖然是數學天才，可是個性非常保守膽小，對自己發現的許多數學定理並不敢發表出來，其中以「非歐幾何學」為其最著名的例子。一般人稱歐幾里德所寫之《幾何學原理》為歐氏幾何學，它有五項基本公設（註），其中的第五公設為平行線公

（註）公設（Postulate）是指不必證明，只在某種學科中被認定成立的真理，例如相對論中，光速為一宇宙常數，便是一種公設。而歐氏幾何學中的第五公設，只有在歐氏幾何學中被認定為成立，其他的幾何學則不認為它成立。公理（Axiom）則是指不必證明，在一切科學中皆成立的真理，例如等量公理：「如果 $a=b$，則 $a+c=b+c$、$a-c=b-c$、$a\times c=b\times c$、$a\div c=b\div c$ $(c\neq 0)$。」便不需要證明，所有的學科都承認等量公理是正確的。

設：「在同一平面上，過一直線外一點，恰有一平行線」。運用此平行線公設，吾人可以証明三角形之三內角和為 180°。若上述平行線公設不成立，則三角形之三內角的和就不一定是 180°。數學家羅巴切夫斯基（Lobatchevsky）所提出的非歐幾何學，便是將歐氏幾何學中的第五公設改成：「過線外一點p，有無限多條平行線」，利用此公設，便可証明出三角形之內角和會小於 180°，這就是第一種非歐幾何學。另外一位數學家黎曼（Riemann）的非歐幾何學則是將上述之第五公設改成：「過線外一點，沒有任何平行線存在」，利用此公設，便證明出三角形之內角和會大於 180°，這就是第二種非歐幾何學。其實數學家高斯早在 1816 年左右就已推導出許多非歐幾何的定理，但因為他的個性過於謹慎，所以這些作品在他生前都沒發表出來，因此非歐幾何學之集大成者便是羅巴切夫斯基與黎曼。而非歐幾何提出後，對人類思想的啟發為：「任何一套理論，只要能夠在自我設定的範圍之內自圓其說，在邏輯上不發生自我矛盾的現象，即可視作正確。」因此科學上可以同時存在兩套或以上不同的學說以解釋科學或自然現象，如牛頓古典力學與量子力學便是一例，古典力學適用於較大的物體，它可以解釋宇宙中天體運行的情況，而不會與天文學上所觀測到的現象與數據發生矛盾，但是古典力學無法解釋電子的運動情況；而量子力學適用於極微小的粒子，它可以解釋原子內電子或其他粒子的運動情況，而不會與原子物理等相關實驗產生矛盾。而吾人並不能說牛頓古典力學是錯的，因為它在其所適用範圍之內並無矛盾。

法國數學家柯西生於1789 年，1857 年逝世。他一生中最重要的貢獻主要是在微積分學、複變函數和微分方程這三個領域。由於他在數學方面的傑出的表現，因此曾被任命為法國科學院院士。柯西一生寫了 800 多篇論文，他的論文編成《柯西著作全集》，在 1882 年出版。因為19 世紀時，微積分學的準則並不嚴格，他於是定義了一系列的微積分學準則。他也和馬克勞林（Maclaurin）重新發現了積分檢驗這個用來測試無限級數是否收斂的方法。

德國數學家黎曼生於 1826 年，1866 年逝世，他在分析學和微分幾何上有很重要的貢獻。數學中以他的名字命名的定理或學門不少，例如黎曼積分、黎曼曲面（圖 5-4）、柯西—黎曼方程式等。1846 年，黎曼進入哥廷根大學學習哲學和神學。在此期間他去聽了一些數學大師的講座，包括高斯的講座，因此黎曼可算是高斯的學生，後來他改學數學。1847 年春，黎曼轉到柏林大學，兩年後他回到哥廷根。1854 年他開創了黎曼非歐幾何，並為愛因斯坦的廣義相對論提供了數學基礎。他在 1859 年成為哥廷根大學的正教授。

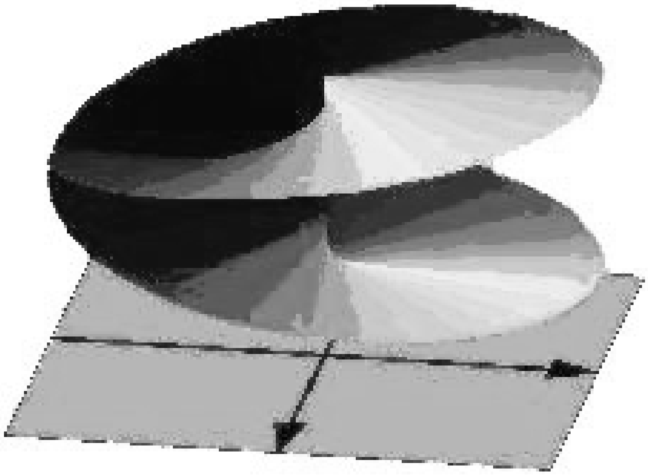


圖 5-4 黎曼曲面

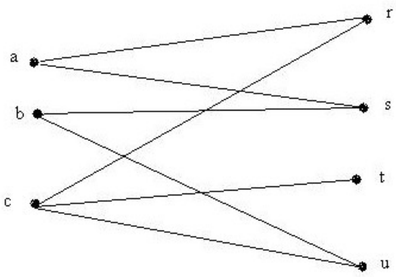
5.2學習數學的重要性與途徑

一般人都很怕學習數學，也不了解數學的功用。其實學習數學在於使人能夠變得更聰明，以下便為一個有趣的例子：老農夫過世留下五頭牛，遺囑要將五頭牛分給兩個兒子：老大得二分之一，老二得三分之一，而經過以下計算：5×1/2=2.5，於是老大分得 2.5 頭牛，5×1/3=1.66…，於是老二分得 1.66…頭牛，因此兩個兒子便打算宰殺牛隻以完成父親的心願。此時有個聰明的鄰居帶來自己的一頭牛，再經過以下計算：（5+1）×1/2=3，於是老大分得 3 頭活牛；(5+1）×1/3=2，於是老二分得 2 頭活牛，而最後剩下 1 頭活牛再由鄰居帶回去。而以上故事可用數學解釋如下：因為 1/2+1/3=5/6 < 1，所以採用老農夫遺囑的方法絕對無法完美分配遺產。但是（5+1）/6=1，因此必須用聰明鄰居的方法，再加一頭牛進來，才可以完美地分配牛隻。

善用圖形與符號是學習數學的不二法門。吾人以 20 世紀英國數學家霍爾（Hall）所提出的霍爾結婚定理（Hall’s Marriage Theorem）為例作為說明，此定理運用簡單之圖形符號的對應關係，便可用於媒介婚配之用，以下為其應用之例：如果「華岡婚友社」想要配對 3 位男生：張三 、李四 、王五 與 4 位女星或名模（圖 5-5）: 林志玲（r） 、侯佩岑（s） 、林嘉綺（t）、白歆惠（u）。假設張三喜歡林志玲與侯佩岑，李四喜歡侯佩岑與白歆惠，王五喜歡林志玲、林嘉綺與白歆惠，那麼是否每個男生都可以配到心愛的女生？

圖 5-5　林志玲　、侯佩岑　、林嘉綺、白歆惠

而上述婚配問題可依照以下步驟繪出圖形來幫助分析：吾人先以 a、b、c 為代號表示 3 位男生，畫在左側，代表第一個族群；而以 r、s、t、u 為代號表示 4 位女生，畫在右側，代表第二個族群。而每位男生與其所喜歡的女生之間則加上連線。霍爾結婚定理的內容是說：兩個分開的族群，彼此之間有連線。其中第一個族群的任一個部份集合的元素個數為 m，而其連線至第二個族群的對應的個數為 n。如果 $m \leq n$，則第一個族群中的每一個元素都可在第二個族群中找到一個專屬於自己的匹配元素。



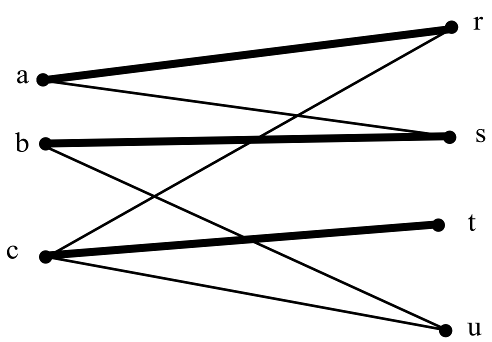
對張三　、李四　、王五　3 人而言，他們連線出去的人有林志玲　、侯佩岑　、林嘉綺　、白歆惠　4 人，此時 $m=3<4=n$。

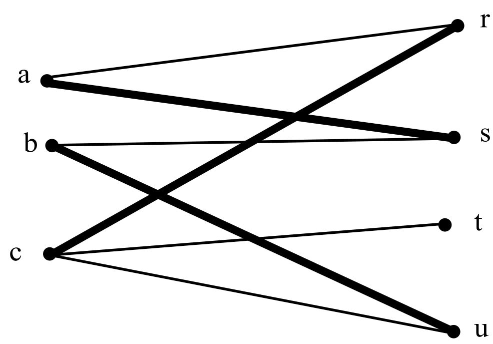
如果只考慮張三　、李四　2 人，則他們連線出去的人有林志玲　、侯佩岑　、白歆惠　3 人，此時 $m=2<3=n$。

如果只考慮張三　、王五　2 人，則他們連線出去的人有林志玲　、侯佩岑　、林嘉綺　、白歆惠　4 人，此時 $m=2<4=n$。

如果只考慮李四　、王五　2 人，則他們連線出去的人仍有林志玲　、侯佩岑　、林嘉綺　、白歆惠　4 人，此時 $m=2<4=n$。

因為不論以上何種情況，霍爾結婚定理所需要的數學條件都會成立，所以每個男生都可以配到喜歡的女生。於是根據上圖所示，華岡婚友社可安排張三配林志玲，李四配侯佩岑，王五配林嘉綺（下頁左圖粗線所示）；或是安排張三配侯佩岑，李四配白歆惠，王五配林志玲（下頁右圖粗線所示）等等。



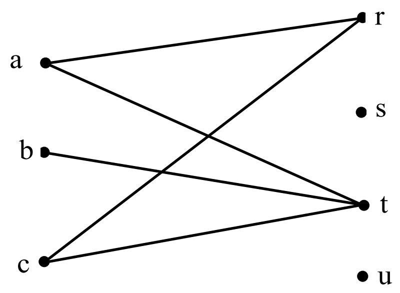


另一方面，如果霍爾結婚定理不成立，則媒介婚配時便無法使得每位徵婚者獲得滿意的結果，以下列例子作為說明：如果華岡婚友社想要配對 3 個男生：小武 、小閔 、小浩 與 4 個女生（圖 5-6）：柯以柔（r）、上流美（s）、蔡淑臻（t）、俏如花（u）。假設小武喜歡柯以柔與蔡淑臻，小閔只喜歡蔡淑臻，小浩喜歡柯以柔與蔡淑臻，那麼是否每個男生都可以配到心愛的女生？

圖 5-6 蔡淑臻與柯以柔

繪出圖形可以看出：對小武 、小閔 、小浩 3 人而言，他們連線出去的人只有柯以柔 、蔡淑臻 二人，於是 $m=3>2=n$，因為不滿足霍爾結婚定理，所以無法每個男生都可以配到心愛的女生。例如，假設小武配柯以柔而小閔配蔡淑臻，則小浩就配不到喜歡的女生。同樣地，如果小浩配柯以柔而小閔配蔡淑臻，則小武就配不到心

愛的女生。



5.3邏輯學與集合論

邏輯學可訓練人的思考趨於理智，並且重視因果關係，以避免在推理上產生矛盾現象。而一般人在日常生活中常出現許多矛盾之處。例如台灣民歌手鄭怡曾唱紅的一首歌，歌詞有如下句子：「苦苦的一杯酒，淡淡地沒有滋味，……」。台灣著名男歌星余天亦曾唱紅的一首歌，其歌詞則有如下句子：「有一位陌生的女孩，我們時常見面，……」，而以上二者歌詞之前兩句皆有互相矛盾之處，如果這些作詞者能夠具有良好的邏輯訓練，也許作出來的歌詞會更加感人。

邏輯學的定理有時非常抽象，必須藉由許多實際的例子作為說明，才能讓人容易了解，例如「若 p 則 q」與「若非 q 則非 p」的邏輯相等，一般人就不容易搞懂。如果用以下例子作為說明，則較能使人明瞭：「因為林志玲很漂亮，所以有些男生喜歡她」與「因為沒有男生喜歡林志玲，所以這表示她不漂亮」，這兩句話的邏輯意義其實是相同的，都是表示男生只喜歡漂亮女生的意思。

另外像數理邏輯中的笛摩根第一定律（De Morgan's First Law）的論述：「『否定（p 與 q）』與『非 p 或非 q』的邏輯是相等的」，一般人也不容易明白。如果用以下例子來說明：「如果『隋棠與白歆惠都是美女』不正確，即表示『隋棠不美或是白歆惠不美』，反之亦然」，則較能讓人容易了解。而笛摩根第二定律（De Morgan's Second Law）的論述：「『否定（p 或 q）』與『非 p 與非 q』的邏輯是相等的」，也可用「如果『隋棠很醜或是白歆惠很醜』不正確，即表示『隋棠與白歆惠都不醜』，反之亦然」來解釋。

許多邏輯學的論述也可以用集合理論的數學符號來表示，羅素詭論（Russell's Paradox）便是一個著名的例子。羅素詭論以集合理論的數學符號來表示為 $S=\{x \mid x \notin S\}$，它的意義可用以下的故事來充分說明：「某犯人被判死刑即將執行，臨死前法官對犯人說：『如果你所交待的遺言是實話則可免死，如果是謊話則非死不

可！』於是這位聰明的犯人便說：『我將被處決。』因此這位犯人便僥倖存活。」事實上，這是一位非常聰明的犯人所說的話，因為如果「我將被處決」是實話，則依照法官的命令，犯人可以免死；但如果「我將被處決」是謊話，則表示犯人不會被處決。所以無論是以上那種情況，這犯人都不會死。另外一個描述羅素詭論的著名命題為：「有一位男性理容師，他只為不為自己刮臉的人刮臉，那麼他到底要不要為自己刮臉？」如果他為自己刮臉，那麼他就是為自己刮臉的人，所以依據他的原則，他就不應該為自己刮臉；如果他不為自己刮臉，那他就是不為自己刮臉的人，依據他的原則，他就該為自己刮臉。

另外，中國戰國時代公孫龍之「白馬非馬」的論述：「求馬，黃黑馬皆可致。求白馬，黃黑馬不可致……是白馬之非馬審矣。」如果以集合理論的數學符號來表示，可寫成{白馬}⊂{馬}，表示包含所有白馬的集合比較小，會被包含在所有馬的集合中，因為馬的顏色除了白色以外，還有黃色、黑色或其他顏色的馬，所以白馬不能代表所有的馬。而「若 p 則 q」與「若非 q 則非 p」的邏輯相等，也能用集合理論來加以說明。例如要解釋「『若是正三角形則一定是等腰三角形』與『若不是等腰三角形則一定不是正三角形』的意義相同」，可以用集合理論：「『A={正三角形}⊂B={等腰三角形}』與『Bc={非等腰三角形}⊂Ac={非正三角形}』的意思一樣」來解說。

5.4機率論與統計學

機率論是指對於大量數目的偶然現象，探討其出現某種結果的比率。統計學則是記錄許多個體的現象，並配合機率的觀念，來反推大量（或全體）數目的某些特性。

5.4.1 機率與樣本空間的關係

由於機率理論探討的是數目很多的群體現象，而非少數或單一個體的情況，因此其結論只適用在多數群體而非少數個體。例如某種癌症的治癒機率是 50%，是表示有一大群此種癌症的患者，約有一半人可以治癒，但是如果某醫生只治療兩個此種癌症的病人，第一個患者不治死亡，並不表示第二位患者一定會痊癒。而機率的大小與樣本空間的選取有關，不同的選取方式，會導致不同的結果。例如有人想比較車禍與飛機空難何者較可怕？如果以每年發生的次數來看，車禍發生的機率遠大於空難，所以車禍較可怕；但是如果以發生之後的死亡人數來看，空難死亡的機率遠大於車禍，因此兩者的可怕情況必須視樣本空間的選取情況而定。

5.4.2 統計學及其應用

一般而言，統計結果須滿足以下幾個條件才正確： 隨機取樣， 取樣數目要多， 統計過程不能改變原先全體之特性。統計學一般常用在預測事情最可能之結果，例如選舉的民意調查、收視率調查等，但是如果統計步驟違反了以上三個原則，則預測結果可能會出錯。例如 1948 年美國總統大選，當時美國的民意調查顯示共和黨候選人杜威的支持率遙遙領先民主黨候選人杜魯門，可是開票結果卻是杜魯門當選，後來經過分析才知道原來是當時美國只有富裕的家庭才會裝設電話，因此當年使用電話訪問來做民意調查，只能看出有錢人的投票傾向較支持杜威。

一般來說，運用統計學所得到之結論並非絕對準確，可以有少數例外；而純粹的數學公式或定律以及其所推導的結論則一定正確。例如幾何學的畢氏定理：「如果a、b、c分別是直角三角形的兩邊與斜邊長度，則$a^2+b^2=c^2$」的性質，無論在何種情況，一定完全正確。但是用統計方式所作之結論：「多運動，身體才會健康」的結論就不一定百分之百正確，因為對大多數人而言，以上之結論雖然正確，但是有少數人雖然很少運動，身體也很健康；甚至於還有少數人雖然時常運動，身體也不健康。

由於統計的結果並非百分之百準確，因此一般統計的數據，常附有正負誤差範圍，所以在觀看這些數據時，必須加以考慮進來，以下列情況作為說明：「A 頻道播放的搞笑片收視率為 20%，B 頻道播放的連續劇收視率為 18%，C 頻道播放的賀歲片收視率只有 6%。如果上述統計的誤差皆為正負 5%，那麼是否實際收看搞笑片的人會比看連續劇或看賀歲片的人多？」實際上，如果考慮正負誤差範圍，A 頻道播放的搞笑片收視率在 15%—25%之間，B 頻道播放的連續劇的實際收視率為 13%—23%之間，C 頻道播放的賀歲片的實際收視率為 1%—11%之間，所以實際收看 A 頻道播放的搞笑片的人不一定會比 B 頻道播放的連續劇的人多，但一定高於 C 頻道播放的賀歲片。

另外統計學所得到結論不一定為因果相關（或邏輯相關），有時只是表示統計相關。例如「肥胖的人較易得心臟病」是屬於因果相關，表示肥胖是導致心臟病的原因之一，但「冰淇淋銷路好的時候，游泳溺斃的人也較多」則是屬於統計相關，但非因果相關，因為冰淇淋銷路好並非導致游泳溺斃的原因，只是二者都常在天氣熱的時候發生，所以統計上會出現冰淇淋銷路好與游泳溺斃具有相關性。而一般的算命理論大多來自古代人的統計結論，但是缺乏實際數據，而且大多是統計相關而非因果相關的結論。例如星相專家常認為：「處女座的人做事較龜毛（做事拖拖拉拉，猶豫不決）」。此命題說明可能有很多個處女座人士很龜毛，但是究竟有多少百分比的處女座人士很龜毛？從古至今的星相算命書籍並未有確切的統計數據留下來，而且處女座並非導致

龜毛的原因，所以二者並非因果相關，而是統計相關。

為了要驗證算命及卜卦理論的準確性，在 2004 年暑假期間，文化大學電機系的同學許銘峻、羅勝名、吳文勝、莊仲岳等人便對易經占卜的準確度作了實驗統計。他們連續 34 個交易日，每天隨機挑選 10 支股票，用易經占卜法來預測當日股票漲跌情況，一共預測了 340 支股票。同一期間，他們也用第六感直覺預測第 5 至第 34 個交易日之當日股票漲跌來作為比較，一共用直覺預測了 300 支股票。同時也在第 1 至第 30 個交易日連續上網抽籤預測當日股票之漲跌，一共上網抽籤預測了 300 支股票。結果他們發現之占卜累計平均準確率可達 60.6%，直覺累計平均準確率為 52.4%，而上網抽籤累計平均準確率只有 33.9%，他們並繪出其統計曲線圖如（圖 5-7）。對於一般人而言，如果算命的準確率只有 50%左右，則其不準確率也是 50%左右，於是準確率與不準確率的比率約為 1：1，則他可能會覺得占卜不夠準確。但是如果算命的準確率達 66%左右，不準確率則只有 33%左右，則準確率與不準確率的比率約為 2：1，則他可能會覺得算命非常準確。其實後者準確率只比前者準確率增加約十幾個百分點而已。

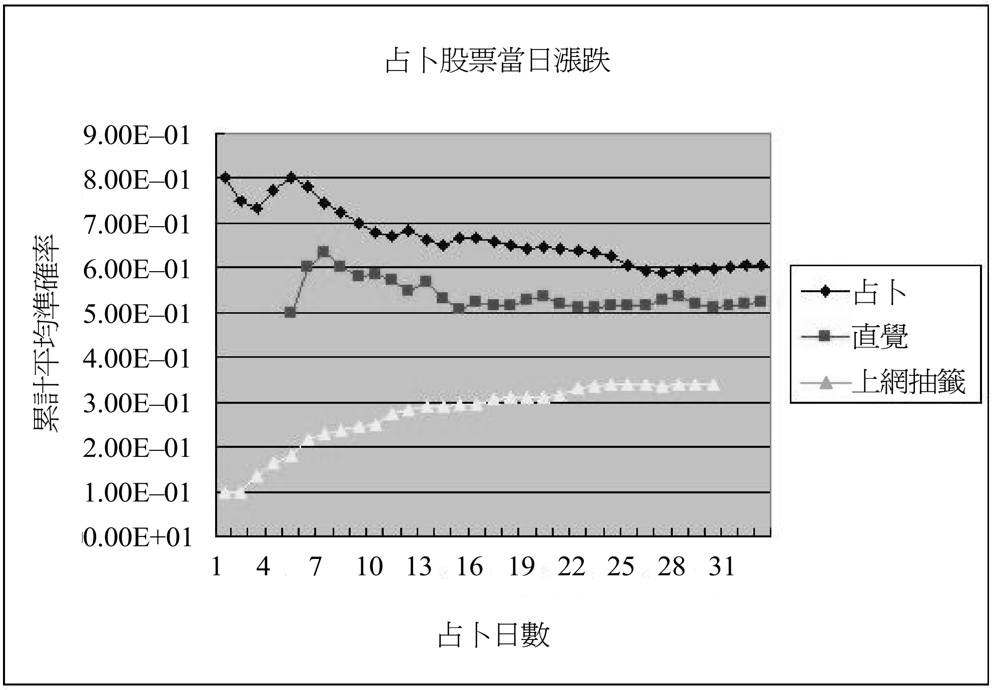


圖 5-7　以易經占卜、第六感直覺預測及上網抽籤三種方式預測股票漲跌之平均準確率

另一方面，民國 97 年 1 月 8 日我國健保局亦曾召開「趣味生命統計」記者會，針對 2006 年死亡的 135071 名國人，依其出生日期所屬星座及平均壽命作統計分析，統

計發現 12 星座中，以魔羯座最長壽，平均壽命是 74.52 歲，比平均壽命最短的牡羊座，多活 1 年 1 個月。最易死於他殺、自殺、意外的是雙子座，平均每 100 名死亡的雙子座民眾，約 10 人死於非命。在活不過 30 歲英年早逝星座排行中，以巨蟹座的 5.06%比率最高，魔羯座的英年早逝比率最低，只有 3.42%。獅子座則是夭折率（死亡時年齡不滿一歲）最高，為 0.95%，最低是魔羯座的 0.64%。而馬偕醫院家醫科陳鼎達醫師則表示：醫界公認與健康有關的因素為遺傳基因、生活習慣及環境因素，健保局的資料只是歸納統計，無法驗證星座與壽命間因果關係，因此民眾聽聽就好，不要迷信，均衡飲食、多運動對長壽比較實際。

統計學的方法可用來檢驗命題敘述是否正確，稱之為假說檢定（Hypothesis Testing）。例如有人認為「女性胸大無腦」是對身材好的女性的一種歧視，想要研究這句話是否真的正確，便可隨機抽樣選出許多位波霸組與平胸組之女生來做智力測驗，再對其智力測驗成績作統計，繪出兩組女生之智商與人數分布的圖形，此智商分布圖的水平座標值為智商成績分數，垂直座標值為每一分數的統計人數，它會有以下幾種可能： 如果波霸組的分布曲線明顯落在平胸組的左邊（圖 5-8 左），則表示大部分「波霸組的女生的智商確實比平胸組女生的智商差，因此「女性胸大無腦」的理論為正確； 如果波霸組的分佈曲線明顯落在平胸組的右邊（圖 5-8 右），則表示大部分波霸組的女生的智商比平胸組女生的智商高，因此「女性胸大無腦」的理論為錯誤； 如果波霸組的分布曲線非常接近平胸組，則表示波霸組女生的智商與平胸組女生的智商差不多，因此上述理論無法用此方法判定是否正確。

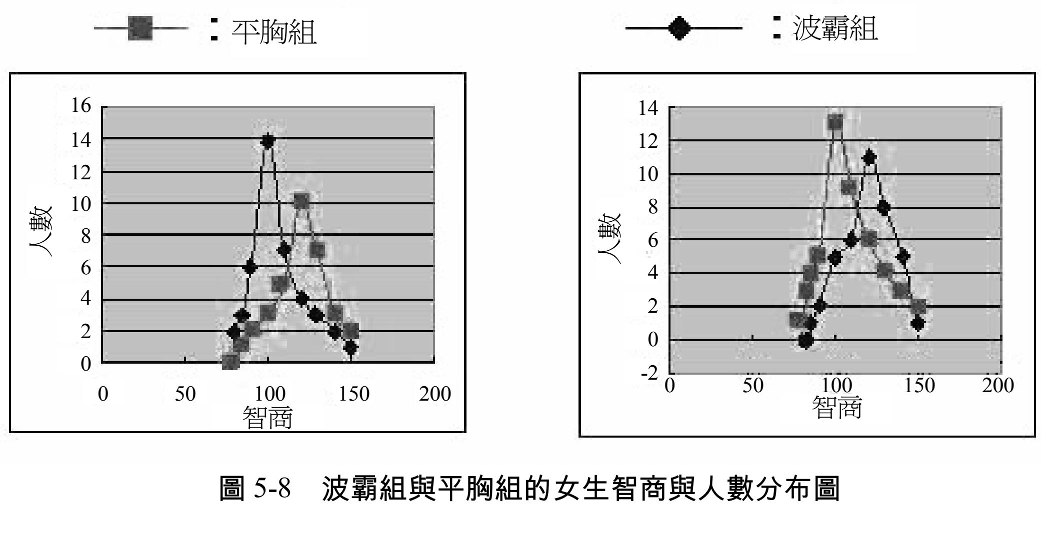


圖 5-8　波霸組與平胸組的女生智商與人數分布圖

又如果有人想要研究人相命理學的理論：「人中（鼻子下方至嘴唇上方的深溝）越

長，則壽命越長」是否正確？便可對往生之人作統計，吾人可至醫院太平間或殯儀館的停屍間，隨機記錄許多位往生者之死亡時的歲數，並且用尺測量其人中長度之值，繪出其圖形。此圖形的水平座標值為人中長度之值，垂直座標值為每一長度的人其死亡時的歲數，而此圖形會有以下幾種可能：　如果圖形呈現人中越長而壽命歲數也越長，表示其相關係數為正值（圖 5-9 左），則「人中越長，壽命越長」的理論為正確；　如果圖形呈現人中越長但是壽命歲數越短，表示其相關係數為負值，則「人中越長，壽命越短」才正確（圖 5-9 右）；　如果圖形呈現水平，則相關係數接近零，則上述人相命理學的理論無法用此方法判定是否正確。

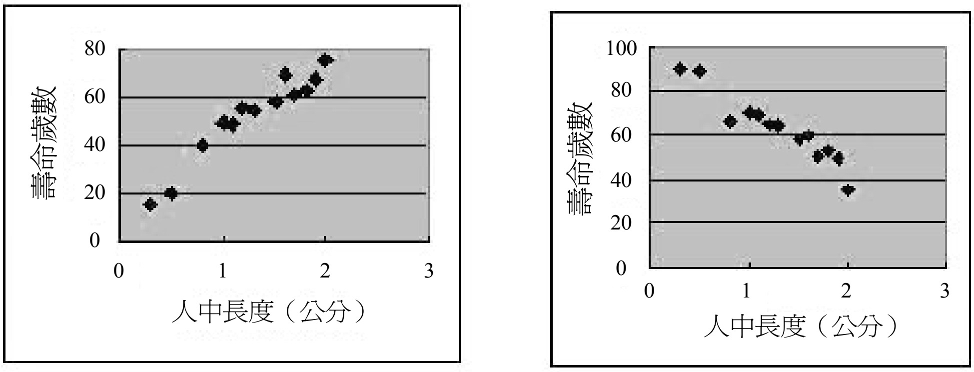


圖 5-9　往生者之死亡時的歲數與其人中長度對應圖

5.4.3 幾項有趣的統計結果

運用統計學作研究，無論是自然科學或是社會科學都必須有敏銳的觀察力，才能夠看出問題的特色與重點，這樣才會得到有意義的研究結果。例如有人對華人的名字作統計比較，便可發現有以下特色：出生在 1949 年後的中國大陸人，單名者較多，如姚明（美國 NBA 職籃明星）、王菲（女歌星）、趙薇（女演員）、鞏俐（女演員）、湯唯（女演員）等。但是台灣人則多取「菜市場名」，如怡君、雅婷、淑媛、淑惠、秀娟、志明、俊傑、家豪、宗翰等。早期台灣女性更常有罔市、罔腰、招弟、招治、阿珠、阿花、春花、春桃、春嬌、春麗等名字。台灣《蘋果日報》2004 年記者林麗雪便曾經報導：「名叫『雅婷』的大學入學考試之考生連續兩年拿到菜市場名冠軍，該年度錄取各大學校系的『雅婷』高達 271 人，再度擊敗 228 名的『怡君』，第三名為『欣怡』有 104 人；而男考生以『家豪』為最多，達到 150 人，『宗翰』有 147 人，排名第二。在放榜前夕，有上萬名網友下注，進行『考生菜市場名字大對決』，最後由『雅婷』勝

出。」

也有人統計中國漢朝以後至唐朝以前的歷史名人，大多是單名，如項羽（西楚霸王）、劉邦（漢高祖）、韓信（漢朝開國大將）、劉備（蜀漢昭烈帝）、曹操（魏武帝）等。但是中國唐朝以後的歷史名人，兩個字的名字則逐漸增多，如李世民（唐太宗）、李隆基（唐玄宗）、趙匡胤（宋太祖）、朱元璋（明太祖）、鄭成功（明朝末年收復台灣之延平郡王）、曾國藩（平定清朝太平天國之亂的功臣）、左宗棠（平定清朝新疆回變的功臣）等。清朝太平天國洪秀全之子名為洪天貴福，是三個字的名字。最有趣的是3000 多年前中國商朝時候的帝王，他們的謚號或名字全部用天干（甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸）來命名，分別是太乙（成湯）、太甲、沃丁、太庚、小甲、雍己、太戊、中丁、外壬、河亶甲、祖乙、祖辛、沃甲、祖丁、南庚、陽甲、盤庚、小辛、小乙、武丁、祖庚、祖甲、廩辛、庚丁、武乙、太丁、帝乙與帝辛（紂），推測其原因可能是某帝王如果出生在甲日便叫作×甲，如果出生在乙日便叫作×乙，其他依此類推。根據上述統計結果，商朝時候的帝王並無丙日與癸日出生者，所以算命師勉強可以歸納出以下結論：丙日或癸日出生的商朝皇室子弟的八字大概不好，所以無法登上九五之尊。

又例如武俠小說（電影、電視劇、布袋戲）中的人物，大多是複姓與怪名，姓複姓者如東方不敗、獨孤求敗、令狐沖、慕容復（以上為金庸武俠小說中的人物）、西門吹雪、司空摘星（以上為古龍武俠小說中的人物）、歐陽上智、南宮佈仁、司徒守義、百里抱信（以上為霹靂布袋戲中的人物）等；取怪名者如韋一笑、岳不群（以上為金庸武俠小說中的人物）、李尋歡（古龍武俠小說《小李飛刀》中的男主角）、葉小釵、龍閣梭羅（以上為霹靂布袋戲中的人物）等。但是像瓊瑤愛情小說中的人物，則多取詩情畫意的名字，如柏霈文、李靄如、唐心雯等。

5.5極限、微積分與最佳化理論

極限是數學上描述無窮大（多）、無窮小（少）的運算或紀錄後，所趨近的數值。而其主要的應用，便是微積分。極限觀念的重要性可用古希臘數學家齊諾（Zeno）所提出的著名齊諾詭論（Zeno Paradox）作為說明：「假設龜兔賽跑時，兔子的速度是烏龜的 10 倍，當烏龜領先兔子 1 公尺時，兔子追了 1 公尺，烏龜則可跑 0.1 公尺；若兔子再追 0.1 公尺時，則烏龜又跑 0.01 公尺；如果兔子再追 0.01 公尺時，則烏龜又跑 0.001 公尺；如此一直下去，則兔子永遠追不上烏龜。」如果對極限觀念有所了解，便可發現這詭論其實是錯的，理由如下：「假設兔子跑 1 公尺的時間要 1 秒鐘，則跑 0.1

公尺要 0.1 秒，若要跑 0.01 公尺則需要 0.01 秒；依此類推，兔子跑 1 公尺+0.1 公尺+0.01 公尺+0.001 公尺+…，所需時間為 1+0.1+0.01+0.001+… = 1/（1 - 0.1) = 10/9（秒）。因此，事實上兔子只要 10/9 秒的時間即可追上烏龜。」以上計算說明一件事實，無限多項的級數和，有可能是一個有限值。

微積分最早是用來分析力學中的位移、速度與加速度之關係，後來又擴展到分析各式各樣的科學問題；同時，亦出現了商業上的應用，如以微積分研究如何投資可獲得最大利潤等。

現代數學的主要應用之一，便是求問題的最佳化 optimization 之解。最佳化通常是求目標函數的極大或極小值。例如「某種藥品每天吃 x 公克，則體力可增加 x%，但是其副作用是肝臟功能會降低 x2%，則每天應該吃多少最好？」如果吾人設定對身體有益為正號，對身體有害為負號。則上述題目可轉化成函數 f (x)=x - x2，則用簡單的微積分理論可知：f'(x)=1 - 2x=0，便可求出 x=0.5 可使得 f (x)達到極大值 0.25，所以此種藥品每天吃 0.5 公克最好。除了用微積分可以計算出極大或極小值之外，還有許多數學方法可以求得問題的最佳化之解。

5.6資訊理論

資訊理論（information theory）是以機率來分析資訊量（事件或新聞重要性）的方式。它有幾個基本原則： 機率越小者，資訊量越大， 週期性出現的事件較不規則出現的事件之重要性為小， 事件發生期間較短者，其資訊量較大。例如要比較總統自殺與今天下雨兩事件的重要性，因為總統自殺之機率很低，所以一旦發生總統自殺的事件將會是大新聞；而今天下雨之機率較高，除非久旱不雨，否則今天下雨不太容易成為大新聞。另外像「狗咬人不是新聞，人咬狗才是新聞」，就是因為狗咬人之機率較高，因此新聞性較低；而人咬狗之機率較低，所以新聞性較高。又例如有人每天寫流水帳式的日記：「早晨起來，刷牙、洗臉、吃飯，……，晚上睡覺」，這種日記便毫無看頭，因為記錄的都是週期性的事件。但是如果是寫某日突發性的事件如：「今天我夢寐以求的帥哥終於請我吃牛排」，這種日記便容易引起人想要偷看。其他如「只演一天的單元劇」與「連演 30 天的連續劇」作比較，前者如果一天沒看，則對劇情一無所知，因為其事件發生期間較短；但是後者如果一天沒看，一般人仍然能猜到劇情走向。

運用上述資訊理論，吾人便可比較「台灣在 921 大地震死亡數千人」與「台灣一年死於車禍者數千人」之新聞重要性：因為 921 大地震發生時間較短（地震時間不會

超過幾分鐘)，而後者時間為一年；況且發生大地震的機率較小，而發生車禍的機率較大，所以前者新聞重要性較高。

5.7群論與對稱觀念

群論（Group Theory）是一種數學，應用很廣泛，可以分析對稱的現象。尤其在化學應用上，群論常用來探討原子分子間的對稱結構。例如圖 5-10 顯示水（H_2O）是平面彎曲形的分子，通過氧原子而將H-O-H角度平分的直線，就是一個轉 180 度旋轉運算的旋轉軸。同時，水分子還有一些對稱平面，其中有一個是包含旋轉軸，而與分子平面垂直的平面，另一個是包含三個原子也包含旋轉軸的平面。加上保留原來分子形狀的對稱運算，總共就有四個對稱運算。而氨（NH_3）的對稱性質就不一樣。它的旋轉軸通過氮原子與三個氫原子所形成之平面的中心，只能轉 120 度，另外也有好幾個對稱平面。而在一個分子裏的對稱運算，會形成一個完整的群。

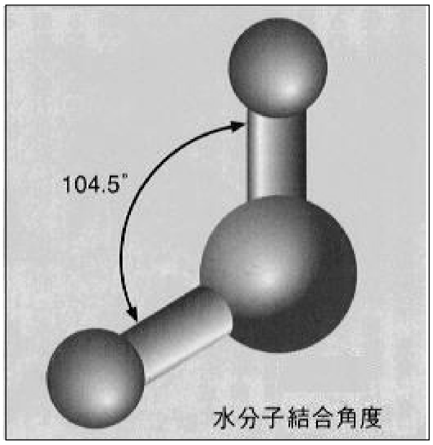


圖 5-10　水分子的對稱結構

中國的對聯文學，亦是充滿群論對稱運算的觀念，在撰寫對聯時，只要把握上下聯之間需要名詞對名詞、動詞對動詞、形容詞對形容詞、副詞對副詞、介系詞對介系詞的基本概念即可。台灣大學與東吳大學都曾有中文系的教授用群論的觀念分析對聯，而對稱語句經過交換後，在文字上仍然為對仗。例如有一副充滿諧音趣味的對聯：「螞蟻樹下馬倚樹，雞冠花前雞觀花」，其中「螞蟻樹」對「雞冠花」是名詞對名詞；「馬」對「雞」亦是名詞對名詞，其他如「下」對「前」是介系詞對介系詞，「倚」對「觀」則是動詞對動詞。如果吾人將上述對稱語句之「馬倚樹」與「雞觀

花」交換成：「雞冠花前馬倚樹，螞蟻樹下雞觀花」，則仍然是一幅對聯，但是其意義已經改變。又如果吾人只將原對聯之「馬」與「雞」交換成：「螞蟻樹下雞倚樹，雞冠花前馬觀花」，則也仍是一幅對聯，只是其意義又不同。換言之，在一個對聯裏作對稱交換，也會形成一個完整的群。

又例如一副相傳為毛澤東所作，常用來罵人的對聯：「廟小妖風大，池淺王八多」，其中「廟」對「池」是名詞對名詞，「妖風」對「王八」亦是名詞對名詞，而「小」對「淺」是形容詞對形容詞，「大」對「多」則是形容詞對形容詞。如果吾人將上述對稱語句之「廟小」與「池淺」交換成：「池淺妖風大，廟小王八多」，則仍然是一幅對聯，只是意思變得不太合理。

5.8中國古代的數學

中國古代的數學十分發達，春秋時代的孔子以禮、樂、射、御、書、數教導學生，其中學生子貢因為數學成績優異，加上口才很好，於是成為春秋末期時代的大商人，可惜孔子當時的數學教材已經失傳。而中國古代的數學教材流傳下來的問題或解法，很多以詩歌或韻文寫成，非常有趣。例如「蘇武牧羊北海邊，不知過了幾多年，分明記得天邊月，二百三十五番圓」，是一首古人教小孩子算術除法的詩，因為 235 除以 12，得到商為 19 而餘數為 7，又已知農曆每 19 年閏月 7 次，所以蘇武牧羊共 19 年。另一首詩：「遠望巍巍塔七層，紅光點點倍加增，共燈三百八十一，試問尖頭幾盞燈」，則是古人教小孩子等比級數和之公式的詩，根據公式：$a_1+2a_1+4a_1+\ldots+64a_1 = a_1(2^7-1)/(2-1)=381$，可求出$a_1=3$，所以尖頭處有三盞燈。

在整數理論中，有一個重要定理，稱之為中國剩餘定理，可說是古代中國最偉大的數學成就之一，這定理又名「韓信點兵」，其問題為：「韓信點兵，三個三個一數餘二，五個五個一數餘三，七個七個一數餘四，問韓信至少有多少兵？」古人以詩：「三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，七子團圓正半月，除百零五便得知」說明「韓信點兵」問題的解法：先找一個 5 與 7 的倍數而除以 3 會餘 1 的數，這個數是 70（三人同行七十稀）。再找一個 3 與 7 的倍數而除以 5 會餘 1 的數，這個數是 21（五樹梅花廿一枝）。再找一個 3 與 5 的倍數而除以 7 會餘 1 的數，這個數是 15（七子團圓正半月）。然後算出 $70\times2+21\times3+15\times4=263$，最後將 263 除以 3、5、7 的最小公倍數 105：$263\div105=2$ 餘 53，這餘數 53 便是答案（除百零五便得知），因此可知韓信至少有 53 個兵。

關鍵詞彙

畢氏定理	歐氏幾何學	霍爾結婚定理
笛摩根第一、第二定律	羅素詭論	齊諾詭論
中國剩餘定理		

自我評量題目

[1]說明中醫與西醫的理論是否類似歐氏幾何學與非歐幾何學，或古典力學與量子力學的情況（例如中醫強調產婦坐月子的重要性，但西方婦女生產後並無坐月子的習俗等等）？

[2]說明π的計算對於現代科技進展有何意義？

[3]如果金城武喜歡林志玲與林嘉綺，楊宗緯喜歡林嘉綺與白歆惠，梁朝偉喜歡林志玲與白歆惠，請問每個男生是否都可配到一個喜歡的女生？如果可以，請問有幾種配對方式？

[4]請自行舉出一個「羅素詭論」的例子。

[5] 根據古代麻衣相法、柳莊相法、命相鐵關刀等命理書籍，以及現代人蕭湘居士、一善居士、飛雲山人等命相大師之著作，認為：「鷹勾鼻者，個性奸詐，城府甚深，居心叵測；善於理財但是十分自私，見不得別人比自己好；而 45 歲及 49 歲時事業易破敗」。已知港星劉德華就類似這種鼻子，如果你是位統計學家，該如何正確地解讀上述劉德華之命理敘述？

[6]著名武俠小說作家金庸自 2000 年左右便開始重新改寫他著名的《天龍八部》、《神鵰俠侶》、《倚天屠龍記》等作品。如果他將《倚天屠龍記》的男主角張無忌改名為張志明，女主角趙敏改名為趙春嬌，周芷若改名為周春桃，小昭改名為小甜甜，而明教的四大法王「紫衫龍王」黛綺思、「白眉鷹王」殷天正、「金毛獅王」謝遜、「青翼蝠王」韋一笑分別改名為「味全龍王」黛嘉千、「時報鷹王」殷宗憲、「統一獅王」謝瓜、「兄弟象王」韋一航，則根據統計學預測，這本武俠小說與其所編成的戲劇之銷路、收視率等在各華人地區大概會增加或減少？試敘述之。

[7]大雄的爸爸恰好大年初一過生日，於是大雄便寫了春聯：「天增歲月爹增壽，春滿乾

坤娘滿門」貼在大門口，結果大雄被媽媽痛打了一頓。依照群論中對稱之觀念，大雄寫的春聯是否真有問題？

參考文獻

[1]林英仁、顏重功、劉榮俊，《離散數學及其應用》，全華科技圖書股份有限公司，民國 95 年。
[2]林惠玲、陳正倉，《基礎統計學：觀念與應用》，雙葉書廊，民國 92 年。
[3]潘有發，《趣味歌詞古體算題選》，九章出版社，民國 84 年。
[4]丘成桐，〈數學和中國文學的比較〉，《數學傳播》，第 30 卷第 1 期，頁 3-14。
[5]倪澤恩，《群論初步》，五南圖書出版股份有限公司，民國 97 年。
[6]寺阪英孝，《非歐幾里德幾何的世界》，益智工房，民國 93 年。